Economía, banca y mercados financieros

Tema 13

Conceptos básicos de matemática financiera y de análisis de rentabilidad de operaciones, casos de negocio y proyectos de inversión

OPOSICIONES - CaixaBank

ÍNDICE

CONCEPTOS BÁSICOS

Quien presta dinero renuncia durante cierto tiempo a gastarlo o a obtener un rendimiento en otras inversiones alternativas. Por el contrario, quien lo recibe tiene la oportunidad de utilizarlo (gastarlo o invertirlo) durante ese mismo tiempo. Si un capital no devenga intereses, es preferible recuperarlo cuanto antes o pagarlo lo más tarde posible. Cuanto antes se disponga del dinero, antes se podrá utilizar.

En definitiva, quien presta lo hace porque tiene una diferente preferencia temporal con el prestatario, por la cual no le importa renunciar a bienes presentes contra bienes futuros y asume unos riesgos de crédito y de mercado, aparte de los de inflación y reinversión, como ya sabemos Por eso, es razonable que quien recibe el dinero compense económicamente a quien lo presta. Se trata de pagarle por la renuncia a ese disponer de su dinero desde ya y por los costes y riesgos anejos a esa operación. En términos económicos se dice que se compensa el coste de oportunidad.

Para estudiar todo lo relacionado con los cálculos de ese "precio de renuncia temporal" hemos de saber lo que significan los términos que vamos a utilizar en todo este tema.

- **Matemática financiera** es la disciplina que efectúa el estudio de las operaciones financieras a través del método deductivo matemático.

- **Operación financiera** es un intercambio temporal de capitales expresados en moneda, en dinero, por tanto, en el que la entrega y la recuperación del mismo tienen lugar en fechas distintas. Supone que existen dos partes puestas de acuerdo previamente, para transferirse unos capitales que "entienden ambas como equivalentes", según una valoración objetiva que recoge el precio de la renuncia temporal de una, la que presta y los riesgos la misma corre. Esa valoración de renuncia temporal y de riesgos se desarrolla bajo los principios de la matemática financiera. En toda operación financiera debe haber "equilibrio financiero", esto es, debe haber "equivalencia financiera" entre la prestación y la contraprestación. En la misma hay siempre cuatro elementos. Los cuatro enlazados de tal modo que, conocidos tres de ellos, siempre podemos determinar el cuarto:

  - Prestación
  - "Ley financiera"
  - Tiempo o plazo
  - Contraprestación

Ejemplo: Hoy impone usted en una cuenta de ahorro a plazo 10.000 EUR (prestación), el acuerdo es recibir al cabo de un año (tiempo o plazo) ese capital más 100 EUR (contraprestación). La matemática financiera nos sirve para decirnos que el interés que le paga la entidad es del 1% anual (ley financiera).

- **Prestaciones y contraprestaciones: simples-únicas y complejas-múltiples**. El ejemplo anterior es el de una operación simple pues prestación y contraprestación están formadas por un único capital. Las complejas o múltiples, están formadas por prestaciones o contraprestaciones de varios capitales. Si un banco concede un préstamo de 100.000 EUR a 15 años, para adquisición de vivienda, por ejemplo, y el prestatario se compromete a pagar 180 cuotas mensuales de 844,00 EUR, la prestación es única y la contraprestación múltiple. Por el contrario, si una persona se compromete a ingresar periódicamente 5.000 EUR durante 48 meses y la entidad a devolverle 275.000 EUR al final de ese plazo, la prestación es múltiple y la contraprestación única. Si usted impone en un fondo de pensiones una cantidad mensual de 1.000 EUR y al cabo de 20 años desea obtener una renta durante diez años, la prestación es múltiple y la contraprestación también lo es.

- **Sujetos de una operación financiera.** Son las personas que interviene en la operación financiera, uno es el sujeto activo, normalmente un ahorrador y otro, el sujeto pasivo, normalmente un inversor o un intermediario del inversor final.

- **Capital financiero.** El valor del dinero es entre otras cosas y para lo que nos ocupa, dependiente del momento en que se dispone de él. Por eso, un capital financiero es el conjunto de dos variables: un importe y una fecha de disponibilidad. Visto así, es el conjunto de flujos de efectivo o de medios que se transmiten los sujetos de la operación financiera entre sí.

  En cálculo financiero, el concepto de "capital" indica los recursos empleados en una operación financiera. Estos recursos pueden ser dinero u otros bienes, que siempre se valoran en dinero. Por eso puede utilizarse aquí indistintamente, y con el mismo significado, capital y dinero. Esos capitales se representan normalmente por: (C, T), capital al inicio y capital al final. Esos dos capitales financieros serán iguales si tienen la misma cuantía y el mismo diferimiento. (C1, T1) " (C2, T2). Es decir:

  (C1, T1) I____________________________I (C2, T2)

- **Equivalencia financiera.** Es toda relación cuantitativa exacta que liga los componentes de los capitales financieros entre sí.

- **Ley financiera.** Es el acuerdo que liga a las partes, expresado matemáticamente (una fórmula matemática), sobre el modo en que se van a entregar o mover los capitales. Movimientos que solo pueden ser de dos tipos:

    - Desde el presente hacia el futuro, que se llama "**capitalizar**". Es sumar a un capital actual (préstamo o inversión) los intereses devengados

    - Desde el futuro hacia el presente que se llama "**actualizar**". (En ocasiones se utiliza la expresión "descontar"). Es restar de un capital futuro los intereses que éste todavía no ha devengado.

  Las leyes financieras también se conocen como "regímenes financieros" pues son los criterios utilizados en la práctica para definir las operaciones financieras. Se pueden clasificar en dos tipos:

    - **Leyes o regímenes financieros "prácticos".** El precio se paga de una sola vez, al final o al principio. Se utilizan para operaciones a corto plazo. Dentro de estos regímenes nos encontramos con:

        - La capitalización simple
        - El descuento simple comercial
        - El descuento simple financiero

    - **Leyes o regímenes financieros "racionales":** Sus características son que el precio se paga periódicamente y se utilizan para cualquier plazo. Dentro de estos regímenes nos encontramos con:

        - La capitalización compuesta
        - El descuento compuesto

- **Precio financiero.** Se le conoce o se le llama "tipo o tasa de interés". Es el rendimiento producido por una unidad de capital en una unidad de tiempo. Es, pues, un precio unitario (en tiempo) de la operación. Por lo tanto, conociendo el importe de un capital y los intereses, o precio total, que devenga durante un periodo de tiempo, por ejemplo, un año, podemos calcular el tipo de interés anual dividiendo estos intereses por el capital prestado. Toda financiación tiene un precio, representado por ese tipo o tasa de interés, el cual puede ser indicado de diferentes formas, las más corrientes son tres:

- **Precio total o "interés":** Diferencia en términos absolutos (expresada en dinero) entre la cuantía inicialmente entregada y la cuantía finalmente recibida en la operación.

- **Precio unitario respecto a la cuantía inicial,** también denominado "tanto efectivo de interés" (Im). Un ejemplo sería: (100, 0) " (102, 2). Lo cual supone que el tanto efectivo de interés obtenido en los dos periodos "I2" será = 2%

- **Precio unitario respecto a la cuantía inicial y medio respecto al plazo,** también denominado "tanto nominal de interés" (Jm). Es el precio por euro y año (o periodo)

Cuando el plazo de la operación es de un año, el tipo de interés se denomina tipo de interés nominal. Cuando es inferior a un año, se denomina tipo de interés efectivo y hace referencia al periodo. Así, por ejemplo, si los intereses producidos por 1.000,00 EUR durante 6 meses han sido 30,00 EUR, hablamos de un tipo de interés efectivo semestral del 3 %. Al tipo de interés también se le llama rédito, tasa o tanto de interés.

- **Interés simple y compuesto** El cálculo de intereses puede realizarse sólo una vez, al acabar el periodo de duración de la operación, o bien por fracciones de este periodo total (meses, trimestres, semestres, años).

    - **El interés simple** consiste en el cálculo de intereses sobre todo el periodo de la operación y su liquidación de una sola vez.

    - **El interés compuesto** consiste en el cálculo de intereses sobre cada periodo de cálculo y la acumulación de estos intereses al capital inicial de ese periodo, lo que da lugar a un nuevo capital sobre el cual calcular los nuevos intereses.

Los intereses se capitalizan en cada periodo de liquidación. Es evidente que el resultado obtenido para una misma operación varía sensiblemente según se calcule por interés simple o compuesto.

No debe confundirse el modo de cálculo de los intereses (compuesto o simple) con la capitalización de estos intereses. La mayoría de los productos financieros suelen calcular los intereses por el método simple y los intereses devengados pueden capitalizarse y generar un nuevo capital (hablamos entonces de productos de capitalización, como los planes de pensiones) o bien liquidarse manteniendo íntegro el capital inicial (caso de la mayoría de los productos financieros).

- **Gráficos financieros.** Se utilizan para representar operaciones financieras de capitalización y actualización o descuento. Puesto que el valor de un capital depende de la fecha en que pueda disponerse de él, en esos gráficos aparecerán siempre:

    - Los capitales que intervienen en la operación.
    - La fecha de disponibilidad de cada capital.

  Normalmente sobre una línea horizontal, que indica el discurrir del tiempo, se marcan las fechas. Los capitales se representarán mediante líneas perpendiculares a la línea del tiempo; las orientadas hacia abajo indican capitales actuales o iniciales, mientras que las orientadas hacia arriba indican capitales futuros o finales.

OPERACIONES A INTERÉS SIMPLE

CAPITALIZACIÓN SIMPLE

Son aquellas en las que se pacta que los intereses que produce un capital no se capitalizan hasta el final de la operación. Por ello los intereses son "improductivos" y, además, se calculan solo sobre el capital.

CASO DE INTERÉS SIMPLE CON CAPITALES Y TANTO INTERÉS ÚNICO

La ley financiera que se aplica es la del interés simple. Por tanto, el precio se calcula por medio de un tanto nominal de interés "i" proporcional a la cuantía prestada inicialmente "C0" y al plazo de la operación "n". Esto es:

$$Cn = C_0+(C_0*i*n) = C_0*(1+(i*n))$$

Un capital de 1.000,00 EUR invertido a dos años al 2%, dará un capital final en capitalización simple de:

C_2 = 1.000,00 *(1+0,02*2) = **1,040,00 EUR**

Es muy importante tener presente a la hora de aplicar la fórmula general que los términos de tiempo "n" y del tanto de interés "i" deben ser homogéneos, por lo que deben de referirse al mismo periodo de tiempo. Así si "n" es igual a años el "i" es tanto nominal anual, si es igual a semestres el "i" debe dividirse por 2, si lo es por trimestres, por 4, etc. Como vemos, siempre los tantos de interés son proporcionales en un año de 360 días. Ejemplo: Un 12% anual equivale a un 3% trimestral y a un 6% semestral o a un 1% mensual.

Si el tipo de interés y el plazo o periodo se refieren a unidades de tiempo distintas, antes de utilizar los valores de i y n hay que homogeneizar dichas unidades. Es aconsejable siempre expresar ambas magnitudes en años, de acuerdo con las siguientes reglas:

- Si el tipo de interés es efectivo, porque se refiere a una unidad de tiempo inferior al año (por ejemplo, tanto por uno mensual), hay que multiplicar el tipo de interés por el número de veces que esa unidad de tiempo cabe en un año. De este modo, obtendremos el tipo de interés nominal. Ejemplos:

    - Un interés efectivo mensual de 0,01 por uno equivale a un tipo de interés nominal o anual de 0,12 por uno (0,01 · 12 meses = 0,12 anual).

    - Un interés efectivo trimestral de 0,035 por uno equivale a un tipo de interés nominal o anual de 0,14 por uno (0,035 · 4 trimestres = 0,14 anual).

    - Si el tiempo se refiere a una fracción de año (meses, trimestres, etcétera), hay que dividirlo por el factor que indica el número de veces que esa unidad cabe en un año. Ejemplo: 18 meses = 1,5 años (18 / 12 meses = 1,5 años).

Veamos algunos ejemplos:

1. Indicar por qué factor hay que multiplicar los siguientes tipos de interés efectivos para convertirlos en tanto por uno anual y hallar el resultado:

Tipo de interés efectivo	Factor	Tipo de interés nominal Tanto por uno anual
0,06 por uno semestral	………	………
0,01 por uno semestral	………	………
0,03 por uno semestral	………	………

Solución:

Tipo de interés efectivo	Factor	Tipo de interés nominal Tanto por uno anual
0,06 por uno semestral	2	0,12
0,01 por uno semestral	12	0,12
0,03 por uno semestral	4	0,12

En interés simple es lo mismo hablar de un 0,06 por uno semestral que de un 0,12 por uno anual o un 0,01 por uno mensual. (En cambio, esta regla no es válida para el interés compuesto.)

2. Indicar por qué número hay que dividir los siguientes tiempos para expresarlos en años y hallar el resultado

Tiempo	Divisor	Resultado años
24 meses	………………………..	…………………………..
5 trimestres	…………………………	…………………………..
2 semestres	…………………………	…………………………..
130 días	…………………………	…………………………..

Solución:

Tiempo	Divisor	Resultado años
24 meses	12	2
5 trimestres	4	1,25
2 semestres	2	1
130 días	360 (o 365)	0,361 (o 0,356)

Para convertir los días en años puede utilizarse el divisor 360, si se considera el año comercial (12 meses de 30 días), o el divisor 365, si se considera el año natural. En banca se emplea uno u otro divisor dependiendo de la operación financiera a realizar. Para intereses "activos se utiliza 360 y para los "pasivos" 365 jugando así cinco días a favor de la entidad en uno y otro caso. Hay que destacar también que, cuando se hable de periodos de tiempo comprendidos entre dos fechas, deben calcularse los días de calendario exactos para luego transformarlos en años. Así, entre el día 3 de marzo y el 20 de abril hay 48 días, es decir, redondeando decimales, 0,132 años (48 / 365).

CASO DE INTERÉS SIMPLE CON CAPITALES Y TANTOS DE INTERÉS, AMBOS DIFERENTES, A IGUAL PLAZO. CÁLCULO DEL "TANTO MEDIO"

Si se tratara de un conjunto de capitales diferentes, cada uno de ellos colocados a una tasa distinta, el tanto medio será el que nos dé el mismo montante final aplicado a la suma de capitales iniciales.

Ejemplo:

Tenemos tres capitales de: 100 al 1%, 110 al 1,2% y 150 al 2%, todos a vencimiento de dos años. El importe del capital final será:

(100*(1+0,01*2)) + (110 * (1+0,012 *2)) + (150 * (1+ 0,02*2) = 102 + 112,64 +156 = 370,64 EUR

Los capitales iniciales eran: 100+110+150 = 360 EUR

El tanto medio "Im", de acuerdo con la definición, será:

$$360 * (1 + (Im * 2) = 370{,}64;\ 370{,}64/360 = 1 + Im * 2;$$

$$1{,}03 - 1 = Im;\quad \mathbf{Im = 3\%}$$

ACTUALIZACIÓN O DESCUENTO SIMPLE

DESCUENTO SIMPLE "COMERCIAL"

Es el que se aplica en la negociación de facturas, pagarés o efectos de comercio, de ahí su nombre. La "ley" financiera utilizada en este caso es conocida por igual nombre y busca anticipar cual es el capital a percibir, en el momento en que se solicita la actualización, procedente de la "actualización" de un montante que se debería cobrar al final de un periodo.

Es indudable que a ese capital final se le deberá restar el importe de intereses correspondiente a esa "anticipación" (de ahí el nombre de "descuento"). Esos intereses se calculan con un tanto nominal "d" que es proporcional a la cuantía a anticipar y al plazo de esa anticipación.

Supongamos, para entender la "ley" del descuento simple o comercial, que tenemos un efecto de comercio con un importe a cobrar "C" en un plazo "n" y que deseamos descontarlo a la fecha de hoy. El importe del descuento será:

- Intereses del descuento comercial "Idc" = (C*d*n)
- La cantidad efectiva que recibiremos será: C – (C*d * n) = C* (1-d*n)

Es evidente que en esta operación el tanto efectivo de interés no es el tanto de descuento pues los intereses se calculan sobre el capital final y no sobre el realmente recibido.

Ejemplo:

Tenemos una letra a 360 días, de importe 1.000,00 EUR, que queremos descontar a fecha de hoy y nos ofrecen hacérnoslo al 3,00% de tasa de descuento. ¿Cuáles serán el capital recibido y el tanto de interés efectivo?

Solución:

- Intereses del descuento: 1.000 *0,03* 360/360 = 30,00 EUR
- Cantidad efectiva recibida: 1.000,00 – 30,00 = 970,00 EUR
- Tipo de interés efectivo: 30,00 /970,00 = 0,0756 = 0,0309 = 3,09%. (Frente al 3,00% de descuento).

DESCUENTO SIMPLE "RACIONAL", TEÓRICO O "MATEMÁTICO"

Únicamente difiere del anterior en que ahora el precio se obtiene de manera que el tanto nominal de descuento "d" es proporcional a la cuantía efectivamente percibida en el origen al anticipar el cobro de la letra o efecto de comercio. En la práctica, es el tipo de descuento comercial el que se usa para "anticipar" las letras o efectos de comercio.

Supongamos, para entender la "ley" de este segundo caso, que tenemos el mismo efecto de comercio que en el caso del descuento comercial. Un efecto de un importe a "C" a un plazo "n" y que deseamos descontarlo a la fecha de hoy, de acuerdo con una ley de descuento racional. El importe del descuento será:

Si "Ve" es la cantidad efectiva a recibir de la operación de descuento, los Intereses del descuento racional "Id" serán:

$$\mathbf{Idr= (Ve*d*n).}$$

La cantidad efectiva "Ve" que recibiremos será:

$$Ve= Cn – (Ve*d*n)$$

Por lo que,

Ve+ (Ve*d*n) = Cn; Ve*(1+d*n) = Cn;

Es decir:

Ve= Cn / (1+d*n)

Por lo que podemos poner todo referido a la fórmula general anterior:

Idr = [Cn / (1+d*n)] * d * n

Si nos fijamos, es muy sencillo de entender pues es la operación contraria de la capitalización simple. En efecto en aquella hacíamos:

$$C_n = C_0 + C_0 * i * n = C_0 * (1+i*n);$$

despejando tenemos:

C0 = Cn / (1+i*n) que no es sino nuestra formula de: Ve= Cn / (1+d*n)

COMPARACIÓN ENTRE DESCUENTO COMERCIAL Y DESCUENTO RACIONAL

Si comparamos ambas "fórmulas", vemos que la cantidad de intereses del descuento comercial es superior a la del descuento racional:

Idc" = Cn*d*n

Idr = [Cn / (1+d*n)] * d * n

Si dividimos entre sí ambas expresiones, tenemos:

$$Idc / Idr = 1/ [1/(1+d*n)] = (1+d*n);$$

Con lo que obtenemos la expresión que liga uno y otro tipo de descuento con esa "cantidad superior":

$$\mathbf{Idc = Idr * (1+d*n)}$$

CASO ESPECIAL DE LAS LETRAS DEL TESORO

Las Letras del Tesoro son activos emitidos al descuento ya que el comprador cobra, al final del periodo de emisión, el valor nominal y paga, al inicio del periodo, el valor efectivo o descontado. Las emitidas a plazos iguales o inferiores a 12 meses se calculan aplicando las fórmulas del descuento racional. En cambio, las que se emiten a 18 meses se calculan aplicando las fórmulas del interés compuesto. Ahora nos referiremos únicamente a las Letras del Tesoro a 12 meses, que, por lo tanto, utilizan las fórmulas del descuento racional simple.

Las Letras del Tesoro tienen un valor nominal de 1 000,00 EUR. Las emitidas a 12 meses (o 52 semanas) tienen una vida exacta de 364 días: las subastadas, por ejemplo, el 19 de abril vencen el 18 de abril del año siguiente. En la subasta se fija el precio medio: es lo que debe pagar el comprador por cada 100,00 EUR. Así, un precio medio de 96,90 EUR indica que, para adquirir 100,00 EUR, hay que pagar 96,90 EUR. (Se trata, por consiguiente, de un porcentaje)

Ejemplo1. Si el Tesoro publica los siguientes datos de una subasta de Letras a 12 meses:

- Fecha de liquidación: 15 de junio
- Precio medio: 97,547 EUR

Indica:

- Valor nominal de la Letra:
- Valor efectivo:
- Fecha de vencimiento

- Importe del descuento:

Solución:

- Valor nominal de la Letra: 1.000,00 EUR
- Valor efectivo: 975,47 (Ya que el precio medio es de 97,547 por cada 100 EUR
- Fecha de vencimiento: 14 de junio del año siguiente
- Importe del descuento: 24,53

El tipo de interés nominal se obtiene aplicando la siguiente fórmula:

$$i = \frac{D}{V_e \cdot n}$$

Ejemplo 2. Calcular el tipo de interés con los datos del caso anterior, utilizando dos criterios de cálculo que fija el Tesoro: Usar como base del año 360 días (año comercial) y el tipo de interés resultante no redondearlo sino truncarlo al quinto decimal (o tercero del porcentaje).

Solución:

Utilizando la formula anterior diremos:

$$\left(i = \frac{D}{V_e \cdot n} = \frac{24{,}53}{975{,}47\,\frac{364}{360}} = 0{,}02487 \right)$$

En definitiva, se obtiene el tipo de interés que sale publicado en la subasta. Si el comprador basa sus cálculos en el año natural (365 días), al aplicar la fórmula anterior obtendrá un tipo de interés ligeramente superior

Otra operación común, en Letras del Tesoro, es calcular el descuento y, en consecuencia, el valor efectivo, cuando se conoce el tipo de interés. Se debe utilizar la fórmula del descuento racional:

$$D = \frac{V_n \cdot i \cdot n}{1 + i \cdot n}$$

Ejemplo:

Calcular el importe que debe abonarse por una Letra del Tesoro a 12 meses si el tipo de interés resultante de la subasta es del 2,487 %.

- Valor del descuento:

$$\left(D = \frac{V_n \cdot i \cdot n}{1 + i \cdot n} = \frac{1\,000{,}00 \cdot 0{,}02487 \cdot \frac{364}{360}}{1 + 0{,}02487 \cdot \frac{364}{360}} = \frac{25{,}146}{1{,}025} = 24{,}53 \right)$$

- Valor efectivo:

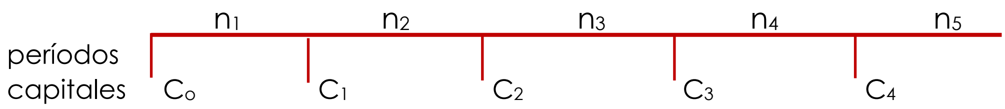
$$\left(V_e = V_n - D = 1\,000{,}00 - 24{,}53 = 975{,}47 \right)$$

VARIACIONES EN EL CAPITAL. “NÚMEROS COMERCIALES”

En las operaciones de capitalización puede ocurrir que, a lo largo del tiempo, varíe el capital o el tipo de interés, o ambas cosas a la vez. La variación del tipo de interés es menos frecuente. Bastante más corriente es la variación del capital; un caso típico es el de la cuenta corriente bancaria, que suele registrar frecuentes movimientos de dinero.

Para calcular los intereses, en ese caso, hay que considerar tantos periodos como capitales distintos existan a lo largo del tiempo de capitalización. Después se sumarán los intereses de todos los periodos.

Gráficamente, la operación puede resumirse de este modo:



Dividimos el tiempo total en tantos periodos (n1, n2, n3...) como capitales distintos existan (C0, C1, C2...).

Hasta ahora, habíamos denominado C0 al capital inicial y Cn al capital final de una operación de capitalización. En el gráfico que acabamos de ver, hay varios capitales y, en consecuencia, varios periodos, de modo que el capital inicial de un periodo se corresponde con el capital final del periodo inmediatamente anterior. Por tanto:

- En el periodo n1 el capital inicial es C0 y el final, C1
- En el periodo siguiente, n2, el capital inicial es C1 y el final, C2.
- Y así sucesivamente.

El capital inicial C0 permanece sin variación durante el tiempo n1. Después, se ingresa o reintegra dinero obteniéndose otro capital C1 que permanece durante otro periodo n2. El siguiente movimiento da lugar a otro capital C2 durante un tiempo n3, etc.

En cada uno de los cinco periodos se producen, respectivamente, los intereses I1, I2, I3, I4, I5, pero consideramos que no se suman al capital porque éste es un caso de interés simple. La suma de I1+ I2+ I3+ I4+ I5 son los intereses simples totales devengados durante el tiempo total de capitalización.

Los intereses de cada periodo serán, respectivamente:

$$I_1 = C_0 \cdot i \cdot n_1$$
$$I_2 = C_1 \cdot i \cdot n_2$$
$$I_3 = C_2 \cdot i \cdot n_3$$
$$I_4 = C_3 \cdot i \cdot n_4$$
$$I_5 = C_4 \cdot i \cdot n_5$$

Por tanto, la fórmula para hallar la suma de intereses de todos los periodos será:

$$I = (C_0 \cdot i \cdot n_1) + (C_1 \cdot i \cdot n_2) + (C_2 \cdot i \cdot n_3) + (C_3 \cdot i \cdot n_4) + (C_4 \cdot i \cdot n_5)$$

Se trata, en definitiva, de aplicar la fórmula del interés simple para cada uno de los periodos. El tipo de interés (i) es común, pero cada capital y tiempo de capitalización pueden ser distintos. Por esto, se puede sacar i como factor común, obteniéndose:

$$I = i(C_0 \cdot n_1 + C_1 \cdot n_2 + C_2 \cdot n_3 + C_3 \cdot n_4 + C_4 \cdot n_5)$$

El producto de cada capital por el tiempo de su respectivo periodo C0 · n1, C1 · n2... recibe el nombre de número comercial; lo representaremos por la letra N. Así:

$$N_1 = C_0 \cdot n_1,\ N_2 = C_1 \cdot n_2 \ldots$$

En el cálculo de los números comerciales de cuentas corrientes bancarias el tiempo se expresa en días, puesto que el capital puede variar a diario.

La utilización de números comerciales nos lleva a la fórmula:

$$I = i\ (N_1 + N_2 + N_3 + N_4 + N_5)$$

La aplicación de esta fórmula resulta más sencilla que calcular los intereses de cada capital distinto

Ejemplo:

Un particular abre una cuenta en una entidad financiera, al 3 % anual, realizando un ingreso inicial de 2 580,00 EUR. Al cabo de 20 días ingresa 720,00 EUR más; 35 días después retira 600,00; 80 días más tarde ingresa 1 500,00; finalmente, 60 días después la entidad liquida los intereses. Completar el esquema que representa los movimientos de esta cuenta:

Período	Movimientos	Capital	Duración días
1	+ 2580,00	2580,00	20
2	+ 720,00	3300,00	35
3	- 600,00	2700,00	....
4	....	....	....

Solución:

Período	Movimientos	Capital	Duración días
1	+ 2580,00	2580,00	20
2	+ 720,00	3300,00	35
3	- 600,00	2700,00	80
4	+ 1500,00	4200,00	60

Ejemplo:
Completar los números comerciales del ejemplo anterior:

- N1= 2.580,00 *20 = 51 600,00
- N2 =
- N3 =
- N4 =

Solución:

$(C_1 \cdot n_2 = 3\,300{,}00 \cdot 35 = 115\,000{,}00)$
$(C_2 \cdot n_3 = 2\,700{,}00 \cdot 80 = 216\,000{,}00)$
$(C_3 \cdot n_4 = 4\,200{,}00 \cdot 60 = 252\,000{,}00)$

Los números comerciales se calculan con el tiempo expresado en días. Como el tipo de interés se refiere al año, habrá que dividir los números comerciales por 365, para convertirlos en años:

$$I = i \cdot \frac{N_1 + N_2 + N_3 + \dots + N_n}{365}$$

Aplicando la fórmula anterior se pueden hallar los intereses totales obtenidos al concluir el último periodo del ejemplo anterior. (Recordemos que el tipo de interés nominal es del 3 %.)

$$\left[I = 0{,}03 \cdot \frac{51\,600{,}00 + 115\,500{,}00 + 216\,000{,}00 + 252\,000{,}00}{365} = 0{,}03 \cdot 1\,740{,}00 = 52{,}20 \right]$$

Otra forma de hallar los intereses de una cuenta se basa en el cálculo del saldo medio acreedor. Volvamos al ejemplo anterior:

Saldo	Días
2580,00 EUR	20
3300,00 EUR	35
2700,00 EUR	80
4200,00 EUR	60
	195

Método:

1-. Se calcula el saldo medio:

$$Saldo\ medio = \frac{2\,580{,}00 \cdot 20 + 3\,300{,}00 \cdot 35 + 2\,700{,}00 \cdot 80 + 4\,200{,}00 \cdot 60}{195}$$

$$Saldo\ medio = 3\,256{,}92$$

Es decir:

$$Saldo\ medio = \frac{Números\ comerciales}{Periodo\ total}$$

2-. Calcular los intereses considerando que el capital inicial es igual al saldo medio:

$$I = C_0 \cdot i \cdot n = 3\,256{,}92 \cdot 0{,}03 \cdot \frac{195}{365} = 52{,}20$$

Hasta ahora hemos supuesto que el tipo de interés permanecía constante. Normalmente es así, pero a veces las circunstancias de los mercados, o la importancia de los saldos de las cuentas, hacen que se modifiquen los tipos de retribución de los depósitos en las entidades financieras. En ese caso, se dividirá el tiempo en tantos periodos como variaciones de tipo de interés haya habido y se calcularán intereses para cada uno, aplicando su tipo correspondiente.

Ejemplo:

Imaginemos que un banco aplica un tipo de interés del 4 % anual a determinadas cuentas de sus clientes. Pero, debido a un descenso generalizado de los tipos, el Banco modifica el tipo de interés de esas cuentas, según el siguiente criterio:

- 3,75 % a partir del 1 de abril.
- 3,50 % a partir del 1 de septiembre.

Calcular los intereses que percibirá un cliente que durante todo el año ha mantenido un saldo constante de 12.000,00 EUR en cuenta.

Solución:

$$\left(12\,000{,}00 \cdot 0{,}04 \cdot \frac{90}{365} = 118{,}36\right)$$

$$\left(12\,000{,}00 \cdot \frac{153}{365} = 188{,}63\right)$$

$$\left(12\,000{,}00 \cdot 0{,}035 \cdot \frac{122}{365} = 140{,}38\right)$$

Otro motivo que obliga a aplicar un tipo de interés variable son los depósitos que se remuneran por tramos, según la cuantía del saldo. Por ejemplo: los primeros 1 000,00 EUR no tienen ninguna retribución; desde 1 000,01 a 5 000,00, el 1 % anual; desde 5 000,01 hasta 10 000,00, el 2 %; desde 10 000,01 en adelante, el 4 %, etc.

Ejemplo:

Un cliente mantiene durante un año un depósito de 12.000,00 EUR por los que recibe un interés variable (en las condiciones que se muestran a continuación). Calcular los intereses producidos por cada intervalo de capital:

Intervalos	Tipo de interés anual	Capital
Primeros 1000,00	0 %	1000,00
1000,01 a 5000,00	1%	4000,00
5000,01 a 10000,00	2%	5000,00
10000,01 y más	4%	2000,00
	Totales	12000,00

Solución:

$$(1\,000{,}00 \cdot 0 \cdot 1 = 0)$$
$$(4\,000{,}00 \cdot 0{,}01 \cdot 1 = 40{,}00)$$
$$(5\,000{,}00 \cdot 0{,}02 \cdot 1 = 100{,}00)$$
$$(2\,000{,}00 \cdot 0{,}04 \cdot 1 = 80{,}00)$$
$$(40{,}00 + 100{,}00 + 80{,}00 = 220{,}00)$$

El tiempo (n) es 1 porque el capital se mantiene constante durante todo el año. El tipo de interés variable puede aplicarse por distintos motivos. Hemos visto los dos principales. En cualquier caso, se dividirá el tiempo de capitalización en tantos periodos como sea necesario y se aplicará, a cada uno, su tipo de interés.

INTERÉS SIMPLE ANTICIPADO

Lo más normal es que los intereses se cobren al final del periodo de capitalización. Pero también pueden cobrarse al principio. Este hecho, no es tan extraño pues frecuentemente en la vida real, ocurre cuando se coloca un capital en una entidad financiera se reciba como remuneración algún bien. El mismo se recibe al formalizar la operación y, al final, se recuperará el mismo capital que se colocó.

Supongamos, por ejemplo, que un banco entrega como elemento de intereses un bien de consumo duradero, cuyo precio de mercado es 230,00 EUR, a aquellos clientes que depositen, durante un año, un capital de 11.500,00 EUR. El importe de los intereses es 230,00 EUR (Por ser el precio del bien con el que se remunera al cliente). El tipo de interés que la entidad ha pagado por anticipado se obtiene dividiendo los intereses entre el capital invertido: 230,00 / 11 500,00 = 0,02.

Pero los 230,00 EUR de hoy no son lo mismo que 230,00 EUR de un año después. Por lo tanto, los intereses que hemos calculado (anticipadamente) no serán los mismos que si el cálculo lo hiciéramos al vencimiento. Para hacer el cálculo al vencimiento, habremos de suponer que el capital inicial es el capital depositado menos el importe del bien recibido; es decir:

C0 = 11.500,00 – 230,00 = 11.270,00 EUR.

Para calcular ahora el tipo de interés al vencimiento debemos aplicar la formula conocida de:

$$i = I / Co*n$$

Es decir:

230,00/ 11.279,00 *1 = 0,0204

El tipo de interés anticipado (que indicaremos con el símbolo i') se puede calcular a partir del tipo de interés al vencimiento (que indicaremos con el símbolo i), aplicando la fórmula general del descuento:

$$i' = i /(1+(i*n)$$

A partir de esta fórmula se puede obtener la inversa, que permite conocer el valor de i:

$$i = i'/ (1- i'*n)$$

Así, en el ejemplo anterior: I = 0,02 / (1- 0,02*1) = 0,0204

OPERACIONES A INTERÉS COMPUESTO

CAPITALIZACIÓN COMPUESTA

DEFINICIÓN Y ACLARACIÓN SOBRE TANTOS NOMINALES Y EFECTIVOS EN LA CAPITALIZACIÓN COMPUESTA

El precio de la financiación se satisface y se acumula al final de cada periodo "p". Estos intereses son pues "productivos", en tanto en cuanto se acumulan al capital inicial produciendo variaciones discretas en su cuantía. El precio de la financiación se determina a través de un tanto nominal de interés "i" que es proporcional a la cuantía acumulada al inicio de cada periodo y a la extensión del mismo, Al final del plazo de toda la operación, suma de los periodos, se entrega la cuantía total acumulada. Es decir:

Momento al final de cada período	Cálculo de las cuantías	Factor común	Cuantía final
0	Co	Co	Co
1	Co+ Co*i	Co*(1+i)	Co*(1+i)
2	[Co*(1 + i)] + [Co*(1 + i)]*i	Co*(1+i)* (1+i))	Co*(1+i)^2
3	[Co*(1+ i) ^2] + [Co*(1 + i) ^2]*i	Co*(1+i)*(1+i)*(1+i)	Co*(1+i) ^3
…	…	…	…
N	…	…	**Co*(1+i)^N**

Hay que recordar que al aplicar la formula general de la capitalización a interés compuesto:

$$C_N = Co*(1+i)^N$$

Podemos obtener el capital inicial despejando en la formula anterior:

$$Co = C_N / (1+i)^N = C_N * 1/(1+i)^N$$

La expresión **(1+i)^N** es fundamental, pues cualquier capital inicial multiplicada por ella nos permite hallar el capital final y dividiendo por ella un capital final obtenemos el capital inicial. En ambos casos a interés compuesto. Cuando “multiplica” se le llama **“factor de capitalización”** y cunado “divide” se le denomina **“factor de actualización”.** Aunque hoy en día con los ordenadores personales y “tablets” ya no es necesario, aún pueden encontrarse tablas financieras que facilitan enormemente los cálculos al dar previamente resueltas las expresiones:

(1+i)^N y

1/(1+i)^N

El término “i” o tanto efectivo de interés y “N”, el número de periodos, deberán venir expresados de acuerdo con la periodicidad de tiempo. Por ello, es imprescindible el que en todo momento se distinga entre tanto nominal de interés "j" y el tipo efectivo de interés "i". Es decir que, a la hora de resolver cualquier problema de capitalización o actualización, deberemos utilizar ambos tipos de interés con un subíndice "k" referido al periodo con el que estemos trabajando, ya sean trimestres, meses, semestres, etc. Cuando solo dispongamos del tanto nominal deberemos transformarlo en tanto efectivo o viceversa. Por esto diremos:

- **J**k es el tanto nominal, donde "k" es el número de partes en que se divide el año y por tanto el número de veces que se produce la acumulación de intereses al capital principal a lo largo del año. Vr. Gr.: J1 es el tanto nominal acumulable por años, J2, Ídem id por semestres, etc.

- **I**k es el tanto efectivo "k -esimal". Es con el que debemos operar y se obtiene de dividir el tanto nominal de interés Jk, por las "k -esimas" partes del año. Es decir:

Ik = Jk / K

En definitiva, si el tipo de interés y el periodo de liquidación de intereses son anuales, el tiempo total de capitalización también deberá expresarse en años. Si figura en otras unidades (meses, días...) deberá tenerse en cuenta que para convertir:

- Días en años, se deberán dividir los días entre 365. (O 360, según el caso.)
- Meses en años, se deberán dividir los meses entre 12.
- Trimestres en años, se deberán dividir los trimestres entre 4. Etc.

Por ejemplo:

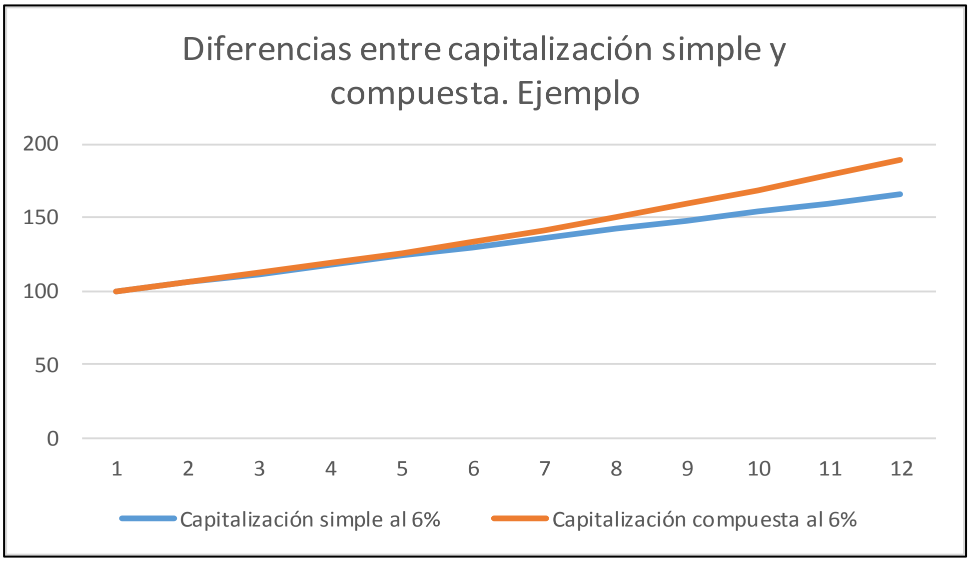
- 60 días son 0,1644 años (60 / 365).
- 6 meses son 0,5 años (6 / 12).
- 4 trimestres son 1 año (4 / 4).
- 1 año y 3 meses son 1,25 años (15 / 12).

Hay una gran diferencia entre la capitalización a interés simple y la realizada a interés compuesto por esa acumulación de los intereses al final de cada periodo.

Veamos un ejemplo:

Momento al final de cada período	Capitalización simple al 6%		Capitalización compuesta al 6%	
0	100	100	100	100
1	100*(1+0,06*1)	106	100*(1+i)^1	106
2	100*(1+0,06*2)	112	100*(1+i)^2	112,36
3	100*(1+0,06*3)	118	100*(1+i)^3	119,10
4	100*(1+0,06*4)	124	100*(1+i)^4	126,25
5	100*(1+0,06*5)	130	100*(1+i)^5	133,82
6	100*(1+0,06*6)	136	100*(1+i)^6	141,85
7	100*(1+0,06*7)	142	100*(1+i)^7	150,36
8	100*(1+0,06*8)	148	100*(1+i)^8	159,38
9	100*(1+0,06*9)	154	100*(1+i)^9	168,95
10	100*(1+0,06*10)	160	100*(1+i)^10	179,08
11	100*(1+0,06*11)	166	100*(1+i)^11	189,83
...	...	...	...	...
N	100*(1+0,06*N)	**Co *(1+i*N)**	100*(1+i)^N	**Co *(1+i)^N**

Lo anterior se ve mejor aún en un gráfico:



CÁLCULOS EN INTERÉS COMPUESTO Y FÓRMULAS DE BASE

1°. Identificar la incógnita o el dato a calcular. Puede ser Cn, C0, I, i , n.

2°. Identificar los datos conocidos y sus valores.

3°. Seleccionar la fórmula adecuada.

4°. Sustituir, en la fórmula seleccionada, los valores de los datos conocidos.

5°. Realizar los cálculos necesarios para hallar el resultado, es decir, el valor de la incógnita.

La forma más rápida de calcular el valor del capital inicial (C0), el tiempo (n) o el tipo de interés (i) consiste en despejar la incógnita correspondiente de la fórmula general:

Cn = C0 *(1 + i) ^n

Éstas son las fórmulas resultantes:

Capital inicial (o actual):

$$C_0 = \frac{C_n}{(1+i)^n}$$

Tipo de interés nominal:

$$i = \sqrt[n]{\frac{C_n}{C_0}} - 1$$

Tiempo:

$$n = \frac{\log C_n - \log C_0}{\log(1+i)}$$

Estas fórmulas se deducen del modo que se indica a continuación:

CÁLCULO DEL TANTO DE INTERÉS NOMINAL

Partiendo de la fórmula general Cn = C0 (1 + i) * n, se traspasa C0 al primer miembro. Para despejar i hay que eliminar en primer lugar el exponente n sacando la raíz enésima de ambos miembros:

$$\sqrt[n]{\frac{C_n}{C_0}} = \sqrt[n]{(1+i)^n} \ ; \ \sqrt[n]{\frac{C_n}{C_0}} = 1+i$$

por último, se traspasa el 1 al primer miembro:

$$\sqrt[n]{\frac{C_n}{C_0}} - 1 = i \ \text{ o, que es lo mismo: } \ i = \sqrt[n]{\frac{C_n}{C_0}} - 1$$

Ejemplo.

Calcular el tipo de interés nominal necesario para que 20.000,00 EUR tengan un valor futuro de 21.000,00 EUR dentro de 3 años, si el cálculo se hace a interés compuesto.

$$i = \sqrt[n]{\frac{C_n}{C_0}} - 1 = \sqrt[3]{\frac{21\,000{,}00}{20\,000{,}00}} - 1 = \sqrt[3]{1{,}05} - 1$$

Para calcular la raíz cúbica se puede recurrir a la calculadora:

$$i = \sqrt[3]{1{,}05} - 1 = 1{,}0163964 - 1 = 0{,}0163964$$

Puesto que i viene expresado en tanto por uno, el resultado debe multiplicarse por 100 para obtener el tanto por ciento, que será 1,64 % (por redondeo decimal).

CÁLCULO DE LA FÓRMULA DEL TIEMPO (INTERÉS COMPUESTO)

Partiendo de la fórmula Cn = C0 (1 + i) * n, se traspasa C0 al primer miembro. Para despejar n, que es un exponente, hay que calcular logaritmos en ambos términos de la igualdad:

$$\log \frac{C_n}{C_0} = \log(1+i)^n$$

Al hacer esta operación pueden aplicarse dos reglas básicas de las operaciones con logaritmos:

- El logaritmo de un cociente es igual al logaritmo del dividendo menos el logaritmo del divisor

$$\log \frac{C_n}{C_0} = \log C_n - \log C_0$$

- El logaritmo de una potencia es igual al producto del exponente por el logaritmo de la base:

$$\log(1+i)^n = n \cdot \log(1+i)$$

De ahí que podamos escribir la igualdad:

$$\log \frac{C_n}{C_0} = \log(1+i)^n$$

de este modo:

$$\log C_n - \log C_0 = n \cdot \log(1+i)$$

Para despejar n, traspasamos "log (1 + i)" al primer miembro, dividiendo:

$$n = \frac{\log C_n - \log C_0}{\log(1+i)}$$

Ejemplo

Calcular el tiempo necesario para que un capital de 20.000,00 EUR tenga un valor futuro de 21.000,00 EUR al 1,64 % nominal anual con intereses compuesto

$$n = \frac{\log C_n - \log C_0}{\log(1+i)} = \frac{\log 21\,000{,}00 - \log 20\,000{,}00}{\log(1+0{,}0164)} =$$

$$= \frac{4{,}32222 - 4{,}30103}{0{,}00706} = \frac{0{,}02119}{0{,}00706} = 3 \textit{ años}$$

TIPOS DE INTERÉS SPOT Y FORWARD

TIPOS DE INTERÉS SPOT

Al tipo de interés, calculado hoy para un valor futuro, se le denomina "tipo spot" o al contado. Se utiliza para calcular el tipo de interés de compraventa de activos financieros. Se calcula teniendo en cuenta que, para cada vencimiento de un activo, se establecen ya los precios de compra futuros.

Para vencimientos inferiores a un año, el tipo de interés se calcula a interés simple y, para vencimientos superiores, se aplica interés compuesto.

Ejemplo

Supongamos que un activo financiero de nominal 1.000 EUR, con vencimiento a s 18 meses se compra por 953,62 EUR. El tipo spot asociado al plazo de 18 meses vendrá dado al calcular el tipo de interés de la operación. Es decir:

$$i = \sqrt[1{,}5]{\frac{1\,000}{953{,}62}} - 1 = \sqrt[1{,}5]{1{,}048636} - 1 = 1{,}03217 - 1 = 0{,}03217 \quad (3{,}217\%)$$

Puesto que el precio de compra de los activos financieros varía diariamente, de acuerdo con las condiciones del mercado, el tipo spot asociado a cada vencimiento también puede variar diariamente. De ahí que, si se representan gráficamente los tipos spot asociados a cada uno de los vencimientos, se obtiene la que se denomina curva de tipos de interés o estructura temporal de tipos de interés (ETTI).

El objetivo de dicha curva es conocer hoy las expectativas sobre la evolución de tipos de interés futuros. Así, una curva creciente indicará que las operaciones a más largo plazo ofrecen mayor interés, es decir, que los tipos evolucionan al alza.

Si el resultado es, en cambio, una línea plana, significa que los tipos de interés se mantendrán invariables.

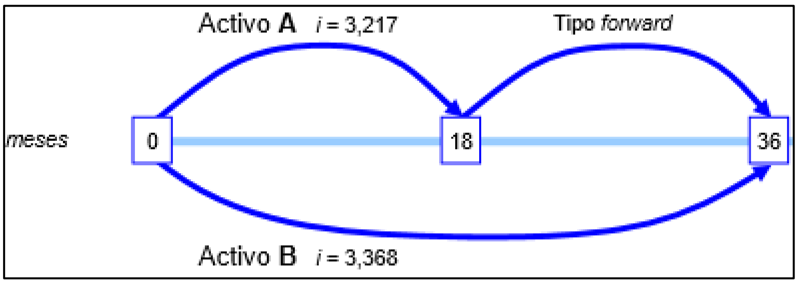
Cuando se tienen dos tipos spot correspondientes a distintos vencimientos, es lógico que el tipo del vencimiento más corto sea menor. En ese caso, puede reinvertirse el activo que vence antes para obtener de él mayor rentabilidad.

Veámoslo en un ejemplo:

- Un activo A, a 18 meses, ofrece un tipo de interés spot de 3,217 %
- Otro activo B, a 36 meses, ofrece un tipo de interés spot de 3,368 %
- Transcurridos los 18 meses, se podría reinvertir el activo A durante otros 18 meses más para que venciera al mismo tiempo que el activo B.

TIPOS DE INTERÉS "FORWARD" O A PLAZO

Se llama tipo de interés forward o a plazo al tipo de interés anual al que se debe capitalizar el activo de plazo más corto para que el resultado sea equivalente al tipo spot de mayor vencimiento.



Es decir, el tipo forward "if "es el que permite alcanzar la siguiente igualdad:

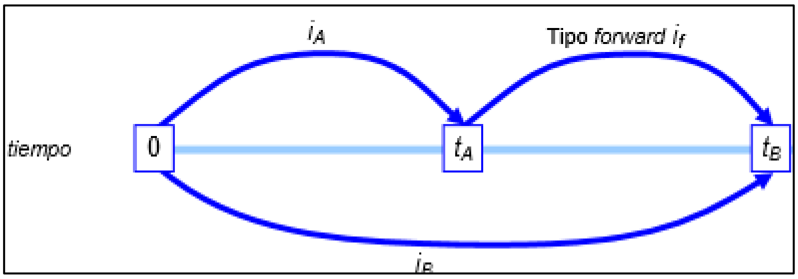
(1 + 0,03217)1,5* (1 + if)1,5= (1 + 0,03368) ^3 = 3,519 %

Ese tipo de interés (3,519 %) es el que debe ofrecerse al activo A, que vence dentro de 18 meses, al reinvertirlo otros 18 meses más, si queremos obtener la misma rentabilidad del activo B.

Si planteamos el problema en términos generales:

- Activo A, de vencimiento anterior, con tipo spot iA y tiempo tA.
- Activo B, de vencimiento posterior, con tipo spot iB y tiempo tB.
- Tipo forward if.

La representación gráfica será:



La ecuación que permite calcular if será:

$$(1 + iA)^{*}tA \cdot (1 + if)^{*}tB - tA = (1 + iB)^{*}tB$$

Los tipos spot utilizados para el cálculo del tipo forward son tipos de interés nominales, normalmente referidos al año. Hay que tenerlo al realizar los cálculos de la ecuación anterior.

CONSIDERACIONES SOBRE LA CAPITALIZACIÓN PERIÓDICA DE LOS INTERESES

Hay muchos productos financieros (cuentas corrientes y de ahorro, depósitos a plazo, etcétera) que generan intereses con una periodicidad semestral, trimestral, mensual... Se llama frecuencia de capitalización al número de veces que se devengan intereses en un año. Se representa mediante la letra k. Si el devengo de intereses es semestral, el valor de la frecuencia de capitalización (k) será 2. Cuando la frecuencia de capitalización es superior a 1, hay que tenerlo en cuenta para calcular el valor futuro del capital final aplicando la fórmula general Cn = C0 (1 + i) ^n.
En este caso:

- El tipo de interés (i) no será el anual sino el que corresponda a cada periodo de liquidación. Se deberá calcular el tipo de interés efectivo de frecuencia k

- El tiempo (n) será el número total de periodos (semestres, trimestres, meses...).

Por ello hay que introducir en la fórmula anterior dos modificaciones:

1. El tipo de interés correspondiente a cada periodo no será i (tipo de interés nominal) sino i/k. Así, si la frecuencia es cuatro (k = 4), porque se liquidan intereses trimestralmente, en lugar de i se utilizará i/4, es decir, el tipo de interés efectivo trimestral

2. El número total de veces que se devengan y capitalizan intereses no será n sino n · k, que es el número total de periodos de devengo

Para que así la misma quede:

$$C_n = C_0\left(1+\frac{i}{k}\right)^{n\cdot k}$$

Hay que darse cuenta que cuando k = 1 la fórmula general se reduce a Cn = C0 (1 + i) ^n. La corrección que acabamos de ver tiene que hacerse también en las fórmulas derivadas. Así, por ejemplo, para calcular el tipo de interés se utilizará la fórmula:

$$\frac{i}{k} = \sqrt[n\cdot k]{\frac{C_n}{C_0}} - 1 \text{, o bien: } \quad i = \left(\sqrt[n\cdot k]{\frac{C_n}{C_0}} - 1\right)\cdot k$$

Ejemplo:

Un capital de 5.000,00 EUR se invierte durante 5 años en un activo financiero, al 4,5 % anual de interés nominal. Los intereses se devengan mensualmente, pasando a incrementar el capital. Calcular el valor futuro del capital acumulado al final de la inversión.

Solución:

- Valor de k: 12
- Tipo de interés efectivo mensual: $\left(\frac{0{,}045}{12}=0{,}00375\right)$
- Valor de C:

$$\left[C_n=C_0\left(1+\frac{i}{k}\right)^{n\cdot k}=5\,000{,}00\left(1+\frac{0{,}045}{12}\right)^{5\cdot 12}=5\,000{,}00\cdot 1{,}00375^{60}=6258{,}98\right]$$

En definitiva, cuanto mayor sea la frecuencia de capitalización a interés compuesto más veces se liquidarán intereses a lo largo del año y, por tanto, más intereses se producirán

ACTUALIZACIÓN A INTERÉS COMPUESTO

GENERALIDADES SOBRE LA ACTUALIZACIÓN A INTERÉS COMPUESTO

La actualización a interés compuesto tiene aplicación, por ejemplo, en los siguientes casos:

- Calcular qué capital debe invertirse en una operación financiera de capitalización para obtener en el futuro un capital determinado.
- Conocer el valor actual de una deuda que vence dentro de un tiempo.
- Hallar el valor de emisión en una operación cupón cero o de una Letra del Tesoro cuya duración sea superior a un año. (Se trata de un tipo de emisión de títulos en la que el titular no recibe intereses durante la vida del valor, sino que lo hace íntegramente en el momento en el que se amortiza el título.)

A partir de la fórmula Cn = C0 (1 + i) ^n, que indica el valor del capital final o futuro, se puede obtener la fórmula del capital inicial o actual. Basta con despejar C0. En la capitalización a interés compuesto los intereses se añaden periódicamente al capital, con lo que éste es cada vez mayor. Por el contrario, en la actualización a interés compuesto se supone que:

- El descuento, en cada periodo de devengo, se va deduciendo del capital.
- El capital es más pequeño en cada periodo de actualización.
- El descuento se calcula sobre el valor del capital actualizado al inicio de cada periodo.

Capital actual o inicial				Capital futuro o final
	X	Factor de capitalización $(1+i)^n$	=	
C_0	=	Factor de actualización $\frac{1}{(1+i)^n}$	X	C_n

CONSIDERACIONES SOBRE LA ACTUALIZACIÓN PERIÓDICA DE LOS INTERESES

Hasta ahora hemos supuesto que, en la actualización de capitales, la aplicación del descuento se hace una vez al año. Es decir, estamos haciendo la simplificación de que el periodo de actualización es igual al periodo al que se refiere el tipo de interés, que casi siempre es anual.

Pero, al igual que la capitalización, la actualización puede hacerse más de una vez al año: semestralmente, trimestralmente, mensualmente... En estos casos la frecuencia de actualización es superior a 1. En la actualización compuesta se produce la misma situación, aunque con un resultado diferente, al de la capitalización compuesta:

- En la capitalización, como sabes, al aumentar la frecuencia aumentan también los intereses y, por tanto, el capital final.

- En la actualización, al aumentar la frecuencia del cálculo de intereses, aumentan éstos y, como consecuencia, disminuye más el capital actual.

Cuando la frecuencia de actualización es superior a 1, no puede aplicarse la fórmula que hemos utilizado hasta ahora para calcular el capital actual. Hay que introducir en ella las mismas correcciones que en la capitalización:

- No puede utilizarse el tipo de interés nominal (i) que se refiere al año, sino sólo la parte que corresponde a cada periodo liquidado, es decir, el tipo de interés efectivo. Así, si la frecuencia es cuatro (k = 4), porque se aplican los descuentos trimestralmente, en lugar de i se utilizará el interés efectivo trimestral i/4 (en general, i/k).

- Hay que multiplicar el número de años (n) por la frecuencia de actualización anual (k). De este modo se tiene en cuenta el número total de periodos en que se aplican los descuentos (n · k).

La **fórmula general de la capitalización**, cuando la frecuencia es superior a 1, es:

$$C_n = C_0\left(1+\frac{i}{k}\right)^{n\cdot k}$$

La **fórmula general de la actualización**, cuando la frecuencia es superior a 1, será:

$$C_0 = \frac{C_n}{\left(1+\frac{i}{k}\right)^{n\cdot k}}$$

Ejemplo.

Una persona, de acuerdo con el interés garantizado de un fondo de inversión, cobrará 100.000,00 EUR, dentro de 10 años. ¿Cuál es el valor actual de ese capital si los intereses se generan trimestralmente y el rendimiento nominal anual es el 3 %?

Solución:

$$C_0 = \frac{100\,000{,}00}{\left(1+\frac{0{,}03}{4}\right)^{10\cdot 4}}$$

$$\left(\frac{100\,000{,}00}{1{,}3483486} = 74\,164{,}80\right)$$

EQUIVALENCIA DE CAPITALES

INTRODUCCIÓN

El dinero tiene un "valor temporal", es decir, su precio debe considerarse siempre asociado a una fecha. Dos capitales diferentes, en momentos distintos, pueden tener el mismo valor para su propietario; decimos entonces que, aunque no sean iguales, esos capitales son equivalentes.

En definitiva, dos capitales disponibles en fechas distintas son financieramente equivalentes cuando, al referirlos a un mismo momento (mediante capitalización o actualización), sus importes coinciden

La equivalencia de capitales sirve para resolver los problemas de intercambio de dinero que se producen en las operaciones financieras. Permite averiguar, por ejemplo:

- El capital que debe pagarse al aplazar o adelantar una o varias deudas.
- El capital futuro obtenido al realizar aportaciones periódicas a una cuenta de ahorro.
- Los pagos sucesivos necesarios para amortizar un préstamo.

Matemáticamente siempre es posible hallar un tipo de interés que convierta en equivalentes dos capitales diferentes disponibles en fechas distintas. Esto no implica que ese tipo de interés sea realista, es decir, que se pueda considerar normal en el mercado financiero.

EQUIVALENCIA A INTERÉS SIMPLE

Si un capital de 10.000,00 EUR se remunera a partir de hoy al 5 % anual con intereses simples, ese capital es equivalente a otro de 10.500,00 EUR disponible un año después. Dicho de otro modo: en las condiciones expuestas, 10.000,00 EUR de hoy son financieramente equivalentes a 10.500,00 EUR de dentro de un año. O, si queremos, un capital de 10.000,00 EUR, disponible hoy es equivalente a otro de 10.500,00 EUR transcurrido un año, si el tipo de interés anual es del 5 %.

Para saber si 12.000,00 EUR de hoy son matemáticamente equivalentes a 14.400,00 EUR de dentro de dos años, siendo el tipo de interés del 10 % anual y el cálculo a interés simple, La operatoria que debe seguirse es:

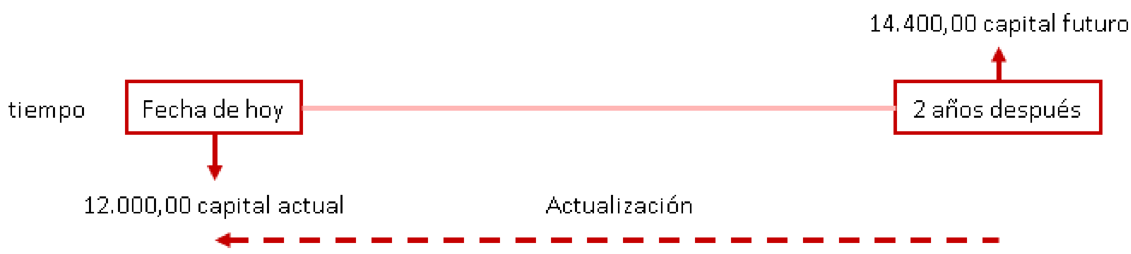
- Capitalizar 12 000,00 EUR al 10 %, durante 2 años.
- Descontar o actualizar 14 400,00 EUR al 10 %, durante 2 años

Para comprobar la equivalencia de los dos capitales anteriores hay que hacer, pues, una de estas operaciones que representamos gráficamente a continuación:

Cálculo capital futuro

$$C_n = C_0\,(1 + i \cdot n) = 12.000{,}00\,(1 + 0{,}1 \cdot 2) = 14.400{,}00$$

Cálculo capital actual



$$C_0 = \frac{Cn}{1 + i \cdot n} = \frac{14.400{,}00}{1 + 0{,}1 \cdot 2} = 12.000{,}00$$

Ejemplo:

Una empresa debe pagar hoy 3.600,00 EUR a la empresa B, pero debido a que tiene problemas de tesorería le propone pagar esa deuda dentro de cinco meses compensándole entonces con 200,00 EUR adicionales por el aplazamiento. Si el tipo de interés normal de mercado es del 8 % anual, ¿qué cálculo puede hacer la empresa B para comprobar si le conviene aceptar el aplazamiento?

Solución:

Cualquiera de las alternativas siguientes puede servirle:

- Capitalizar 3 600,00 EUR, al 8 %, durante 5 meses.
- Descontar 3 800,00 EUR, al 8 %, durante 5 meses.
- Calcular los intereses de 3 600,00 EUR, al 8 %, durante 5 meses

Las dos situaciones más simples en que tiene aplicación la equivalencia de capitales son:

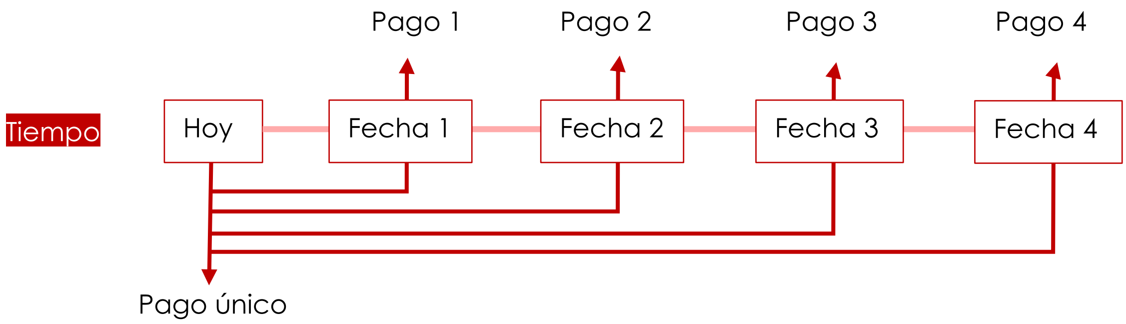
- Cuando se retrasa el vencimiento de un capital: el nuevo importe será el capital equivalente en la nueva fecha. Es un caso de capitalización por retraso de vencimiento.

- Cuando se adelanta el vencimiento de un capital: el nuevo importe será su capital equivalente en la fecha en la que se adelanta. Es un caso de descuento o actualización por adelanto de vencimiento.

En ambas situaciones se establece equivalencia entre dos capitales porque se sustituye uno por otro. Sin embargo, en la práctica comercial pueden surgir situaciones más complejas donde intervengan varios capitales.

Supongamos que una empresa debe realizar cuatro pagos en fechas distintas. Si desea efectuar hoy un único pago que cancele todas sus deudas, la cantidad a pagar ha de ser financieramente equivalente al conjunto de todos los pagos previstos inicialmente.

Para calcular el pago único, habrá que descontar cada pago a la fecha de hoy. (Ese capital único será igual a la suma de los capitales equivalentes, a fecha de hoy, de cada uno de los pagos.) En el supuesto que acabamos de plantear, el capital único se satisface en una fecha anterior a todos los capitales a los que sustituye, pero no tiene por qué ser forzosamente así pues el pago único puede realizarse en cualquier fecha anterior, posterior o intermedia a los pagos parciales. He aquí la representación gráfica:



Siempre que se produce una sustitución o un intercambio de dinero debe haber equivalencia financiera: la suma de capitales aportados ha de ser igual a la suma de capitales recibidos, referidos a una misma fecha y utilizando un determinado tipo de interés para calcular intereses o descuento.

La mayoría de las operaciones de sustitución o intercambio de un capital por varios, o viceversa, son a largo plazo. De aquí que las capitalizaciones y descuentos se calculen normalmente a interés compuesto.

EQUIVALENCIA A INTERÉS COMPUESTO

En interés compuesto:

- **Para capitalizar o calcular el capital final, Cn,** hay que multiplicar el capital inicial por el factor de capitalización, cuya fórmula es: (1 + i) ^n, si se calculan intereses una vez al año o bien, si se calculan los intereses "k" veces en el año:

$$\left(1+\frac{i}{k}\right)^{n\cdot k}$$

- **Para actualizar o calcular el capital actual, C0,** hay que multiplicar el capital final, Cn, por el factor de actualización: 1/(1+í) ^n, si se calculan intereses una vez al año o bien si se calculan los intereses "k" veces en el año.

$$\frac{1}{\left(1+\frac{i}{k}\right)^{n\cdot k}}$$

En cualquier caso, n representa el número de años de la operación, mientras que i es el tipo de interés nominal anual y k es la frecuencia de capitalización o actualización en un año. El factor de actualización se obtiene dividiendo la unidad por el factor de capitalización. Así pues, en términos matemáticos, el factor de actualización es el inverso del factor de capitalización.

Ejemplo 1:

¿A cuánto equivalen hoy 20.000,00 EUR disponibles dentro de tres años, si la actualización se hace trimestralmente al 7 % nominal anual?

Solución: (El exponente es: 3*4, dado que se actualiza cuatro veces al año)

$$\left[\frac{20\,000{,}00}{\left(1+\frac{0{,}07}{4}\right)^{3\cdot 4}}=16\,241{,}16\right]$$

Ejemplo 2:

¿A cuánto equivalen 10 000,00 EUR de hoy, dentro de cinco años, si se aplica un tipo de interés del 6 % nominal anual con capitalización mensual?

Solución: (El exponente es: 5*12, dado que se actualiza doce veces al año)

$$\left[10\,000{,}00\left(1+\frac{0{,}06}{12}\right)^{5\cdot 12}=13\,488{,}50\right]$$

En la práctica, los problemas de equivalencia pueden ser más complejos, produciéndose operaciones financieras de dos tipos:

- **Intercambio de capitales:** ocurre cuando se da un flujo de capitales de signo contrario, es decir, cuando existen pagos que se compensan con cobros. Ejemplo: un préstamo en el que una entidad financiera realiza un desembolso que luego recupera mediante una serie de cobros periódicos

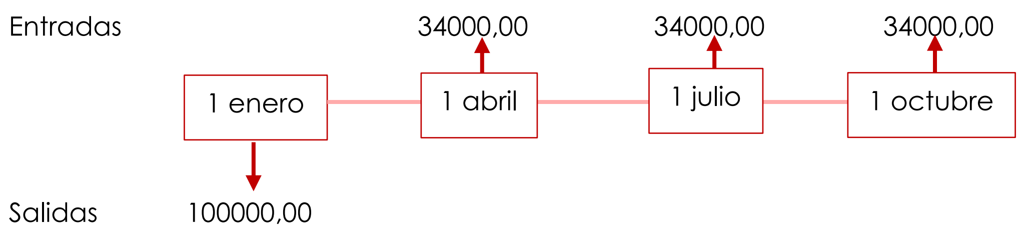
- **Sustitución de capitales:** ocurre cuando se cambia la fecha de disponibilidad de un conjunto de capitales; es decir, cuando varían sus fechas de pago o de cobro, con lo que, en consecuencia, se modifica también su cuantía. Ejemplo: Se atrasan unos pagos comprometidos para determinadas fechas, con lo que su cuantía aumenta

En definitiva, la equivalencia se producirá cuando el valor de la suma financiera de los cobros sea igual al valor de la suma financiera de los pagos, referidos todos ellos a una misma fecha y a un determinado tipo de interés.

Para plantear las operaciones financieras de intercambio o de sustitución de capitales resulta útil representarlas gráficamente. En el caso de intercambio de capitales, la representación gráfica se hace sobre una línea horizontal, que indica el tiempo, dibujándose flechas perpendiculares que muestran las distintas entradas y salidas de capital. También sabemos que:

- **Las flechas hacia abajo representan salidas de capital** (pagos).
- **Las flechas hacia arriba representan entradas de capital** (cobros).

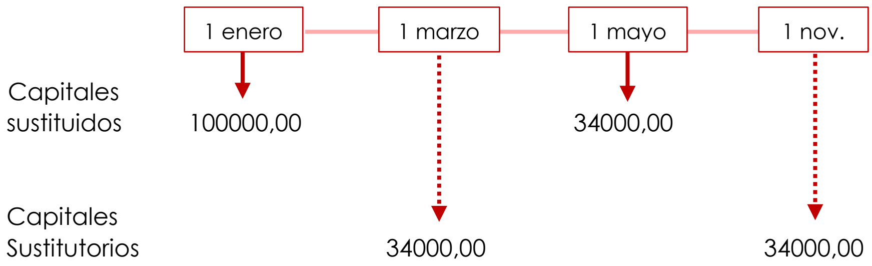
Ejemplo: el 1 de enero, una entidad bancaria presta 100.000,00 EUR a un cliente. El préstamo se devolverá en tres pagos iguales de 34.000,00 EUR (incluyendo capital e intereses), siendo sus fechas de vencimiento el 1 de abril, el 1 de julio y el 1 de octubre. La representación gráfica del flujo monetario, para la entidad bancaria, sería



En el caso de sustitución de capitales, todos ellos se representan mediante flechas que tienen el mismo sentido y están en el mismo lado que delimita la línea del tiempo. Para diferenciar los sustituidos y los sustitutorios utilizaremos distintos trazos de línea:

- **Los capitales sustituidos se representan mediante flechas de trazo continuo.**
- **Los capitales sustitutorios se representan mediante flechas de trazo discontinuo.**

El gráfico que sigue representa que los pagos que debe realizar una persona el 1 de enero y el 1 de mayo son sustituidos por otros que se realizarán el 1 de marzo y el 1 de noviembre:



Aplicando un determinado tipo de interés, la suma del valor actual de los pagos del 1 de marzo y del 1 de noviembre son equivalentes a la suma del valor actual de los pagos del 1 de enero y del 1 de mayo.

Naturalmente, el número de pagos sustituidos no tiene por qué ser igual al número de pagos sustitutorios. Hemos visto en el intercambio de capitales que un único capital es equivalente a varios capitales futuros; de la misma forma, varios capitales futuros pueden ser equivalentes a otro único capital futuro (un solo pago puede sustituir a varios pagos).

Vemos que, en cualquier problema de equivalencia, sea de intercambio o de sustitución de capitales, se cumple el mismo principio:

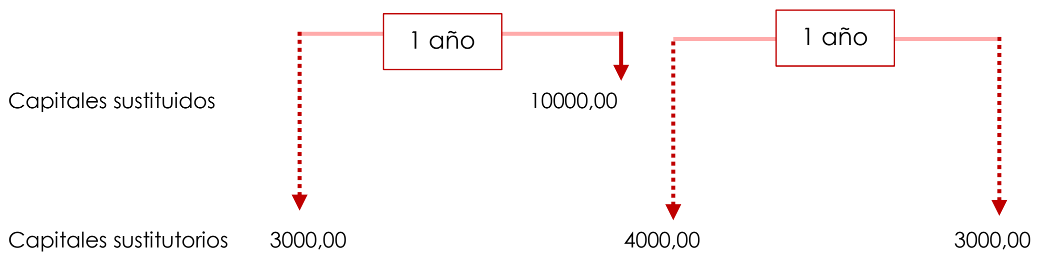
Los capitales intercambiados o sustituidos han de ser equivalentes, aplicando el tipo de interés establecido en la operación (generalmente a interés compuesto) y teniendo en cuenta la fecha de cobro o pago de cada capital.

En general, se aplica el principio de equivalencia de capitales cuando se sustituye o intercambia:

- Un capital por varios capitales.
- Varios capitales por un solo capital.
- Varios capitales por otros capitales diferentes

En adelante nos referiremos indistintamente a sustitución o a intercambio de capitales, dado que en ambos casos se aplica el mismo principio de equivalencia.

Se llama valor financiero (o suma financiera o capital equivalente) al capital que debe pagarse a cambio de otros varios que vencen en distintas fechas. Cuanto más se aplaza el pago del valor financiero que sustituye a varios, mayor será la cuantía de ese capital único pues al aplazar el pago del capital se producen más intereses. Por esto, si una persona debía pagar a otra 10.000,00 EUR en una fecha concreta y un año antes de esta fecha le entrega 3.000,00 EUR. y en la fecha prevista le entrega 4.000,00 EUR y le plantea pagar el resto dentro de un año; aplicando la equivalencia de capitales a un mismo tipo de interés, el importe que debería pagar dentro de un año será igual que el saldo de 3.000,00 EUR, pues a un mismo tipo de interés nominal, 3.000 EUR pagados con un año de antelación son equivalentes a 3.000,00 EUR pagados con un año de demora. Ésta sería la representación gráfica del ejemplo anterior, desde la perspectiva del deudor:



Por el contrario, si en el ejemplo anterior, el primer pago hubiera sido de 2.000,00 EUR y el segundo de 4.000,00 EUR, el tercer pago que cancelará la deuda, habría de ser mayor que 4.000,00 EUR. En este caso, el descuento de los 2.000,00 EUR que se anticipa en un año es inferior a los intereses de los 4.000,00 EUR que se aplazan en el mismo tiempo.

En el cálculo financiero se plantean situaciones en las que, a partir de unos determinados datos, debe calcularse:

- El importe del capital (inicial o final).
- La fecha de vencimiento.
- El tipo de interés de la operación.

La operación más frecuente es el cálculo del importe de un capital equivalente a varios capitales.

Supongamos que el 1 de enero un comerciante recibe un préstamo a devolver en cuatro cuotas: 10,000,00 EUR, al final del primer año, 15.000,00 EUR, al final del segundo, 20.000,00 EUR, al final del tercero y 25.000,00 EUR al final del cuarto. Los intereses se calculan anualmente al 5 %. El comerciante quiere saber qué pago único debería efectuar al final del cuarto año para cancelar los cuatro pagos. En el supuesto de que no haya hecho efectivo ninguno hasta el momento. En este ejemplo se plantea una sustitución de capitales en que:

- Varios capitales son sustituidos por uno solo.
- Hay que calcular la cuantía de un capital único.
- La fecha de cálculo del valor financiero es el final del cuarto año

Podemos representar el ejemplo anterior de este modo:

	31/12/año1	31/12/año2	31/12/año3	31/12/año4
Capitales sustituidos	10000,00	15000,00	20000,00	25000,00
Capitales Sustitutorios				?

Para resolver el problema será necesario hallar el valor de cada cuota en la fecha de vencimiento común

1. Para calcular a cuánto equivale la primera cuota de 10 000,00 EUR al final del cuarto año, habrá que hacer un cálculo de capitalización Puesto que se atrasa el pago. Siendo el tipo de interés anual del 5 %, dicho capital equivalente será de: 11.576,25 EUR.

$$[Cn = C0\ (1 + i)^n = 10.000{,}00\ (1 + 0{,}05)^3 = 11.576{,}25]$$

2. El capital equivalente de la segunda cuota, 15 000,00 EUR, se calculará haciendo una capitalización, ya que el pago se retrasa dos años. Por lo tanto:

$$Cn = C0\ (1 + i)^n = 15.000{,}00\ (1 + 0{,}05)^2 = 16.537{,}50 \text{ EUR}$$

3. El capital equivalente de la tercera cuota se calculará haciendo también una capitalización durante un año:

   Cn = C0 (1 + i)^n = 20.000,00 * (1 + 0,05)^1 = 21.000,00 EUR

   El capital equivalente de la cuarta cuota no variará, puesto que su fecha ya coincide con la del vencimiento común.

4. Para calcular el capital total equivalente a la fecha de vencimiento común:

   - Se sumarán los cuatro capitales equivalentes.
   - Se capitalizarán los cuatro capitales equivalentes a la fecha del último pago

Pues los capitales equivalentes ya están situados en la fecha de vencimiento común, es decir, 31/12/del año 4.

Por tanto, el pago único al final del cuarto año que satisfará la deuda completa será:

11.576,25 + 16.537,50 + 21.000,00 + 25.000,00 = 74 113,75 EUR

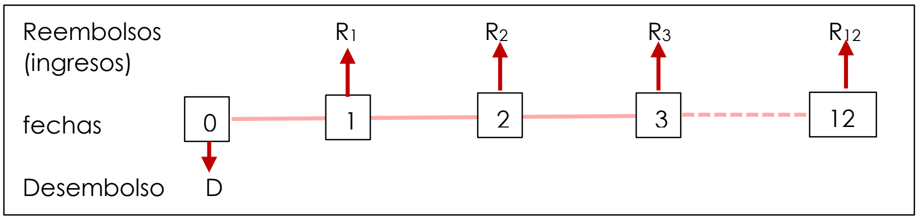
Hemos calculado el capital equivalente, para una misma fecha de vencimiento, de todos los capitales a sustituir o intercambiar.

Supongamos ahora que el comerciante de los ejemplos anteriores cambiase de opinión y desease cancelar la deuda el 31/12/ del año 2 en lugar del 31/12/ del año, como estaba inicialmente previsto. Aunque el problema se podría resolver valorando ahora cada nuevo capital a la fecha del 31/12/año 2 en lugar del 31/12/año 4 (de una forma similar a la efectuada anteriormente), podemos aprovechar que conocemos la deuda al 31/12/ del año 4, que es de 74.113,75 EUR y buscar la deuda equivalente al 31/12/ del año 2 al tipo de interés anual del 5 %. Para ello bastará con actualizar 2 años la deuda citada.

$$\left[C_2 = \frac{C_4}{(1+i)^2} = \frac{74\,113,75}{(1+0,05)^2} = 67\,223,36\right]$$

En definitiva, una vez sustituidos un conjunto de capitales por uno solo de una fecha determinada, para conocer el capital equivalente en otra fecha distinta bastará con actualizar o capitalizar el capital único sustituido a la nueva fecha deseada.

Si una empresa piensa solicitar un préstamo a devolver en tres años mediante pagos trimestrales vencidos, en los que se incluyen capital más intereses. En una operación como ésta se cumplirá que el importe del capital prestado será equivalente a la suma financiera de los pagos, aplicando un determinado tipo de interés. He aquí la representación gráfica, desde el punto de vista del prestamista, de una operación de este tipo:



Si calculamos el valor financiero o capital equivalente de todos los reembolsos refiriéndolos a la fecha inicial (la de desembolso), se debe cumplir, para un determinado tipo de interés, que:

Capital desembolsado = Suma de importes ingresados, actualizados a la fecha inicial (de desembolso)

Ejemplo:

Supongamos que una empresa ha obtenido de su entidad financiera un préstamo de 20.000,00 EUR a tipo fijo y que el plan de amortización contempla el pago de tres cuotas anuales (las cuales incluyen amortización e intereses): 6.500,00 EUR dentro de un año, 7.500,00 EUR dentro de dos años y 8.500,00 EUR dentro de tres años. ¿Qué expresión matemática refleja la equivalencia entre estos cuatro capitales en la fecha de concesión del préstamo?

Solución:

$$20\,000{,}00 = \frac{6\,500{,}00}{(1+i)} + \frac{7\,500{,}00}{(1+i)^2} + \frac{8\,500{,}00}{(1+i)^3}$$

Esta ecuación compara un capital actual (el importe del préstamo) con varios capitales futuros en fechas diferentes (las tres cuotas anuales) y actualiza estos capitales futuros a la fecha de disposición del préstamo. Como vemos, la ecuación tiene como incógnita el tipo de interés (i). La resolución matemática de esta ecuación puede ser bastante difícil si el número de capitales es elevado. Hay que utilizar un ordenador o, al menos, una calculadora financiera. Cuando se conoce el valor final y el valor actual de una operación, además de la duración de la misma, es muy fácil calcular el tipo de interés anual.

La fórmula a utilizar se deduce directamente de la fórmula básica de la capitalización, a interés compuesto:

$$i = \sqrt[n]{\frac{C_n}{C_0}} - 1$$

Donde:

- n es la duración de la operación, expresada en años.
- i es el tipo de interés nominal o anual, en tanto por uno

Ejemplo:

Imaginemos que hoy hay que desembolsar 97,30 EUR por un activo que vence dentro de 6 meses y por el que se percibirán en total 100,00 EUR al vencimiento. En este cobro se consideran los intereses más el capital. ¿Cuál es el tipo de interés de la operación?

Solución:

$$\left(i = \sqrt[0,5]{\frac{100,00}{97,30}} - 1 = 0,05627 \right)$$

CRITERIOS DE SELECCIÓN Y ANÁLISIS DE INVERSIONES

INTRODUCCIÓN

¿Cómo distinguir las inversiones rentables de las irrentables? ¿Cómo clasificar correctamente los proyectos de inversión de más a menos interesantes?.

Los criterios con base contable han partido, normalmente, del beneficio y según éste, se valoraba el proyecto; sin embargo el beneficio no suele ser un buen criterio por dos hechos fundamentales:

- Problemas de valoración: La cuantía de las amortizaciones es casi siempre discutible. Algo parecido sucede con la valoración de existencias, así como con otras cuentas.

- Problemas para la consideración del valor del dinero en el tiempo: Así las ventas comienzan a formar parte del beneficio en el momento en que se realizan, no cuando se cobran. De la misma manera, los gastos se restan sin tener en cuenta el momento del pago.

Abandonaremos, en consecuencia, los criterios basados en el beneficio para fijarnos en un hecho más objetivo como es el flujo de caja, la variación incremental de tesorería por causa del proyecto de inversión, que es lo que aparece en nuestros perfiles de fondos, pues aunque sus datos han de basarse también en estimaciones, éstas son menos discutibles. Hablaremos, en consecuencia, de métodos de evaluación de los perfiles de los proyectos.

Cuando un activo genera intereses durante un intervalo de tiempo inferior al año, se calculará la rentabilidad aplicando la fórmula del interés simple. Si la duración de la inversión es superior al año, se calcula el tipo de interés utilizando la fórmula del interés compuesto. Se obtiene así la rentabilidad anualizada.

$$i = \left(\sqrt[n \cdot k]{\frac{C_n}{C_0}} - 1 \right) \cdot k$$

CRITERIO DEL "PERÍODO DE RECUPERACIÓN" O "*PAY BACK*"

Supongamos una inversión con un desembolso inicial D y generaciones iguales de fondos durante el resto de su vida. El período de recuperación vendrá dado por la fórmula:

$$Pb = D / GF$$

Vemos que así tendremos el número de años en los que se recuperará la inversión. Así si el desembolso inicial es de 1.000 las generaciones de fondos de 400:

$$Pb = 1.000 / 400 = 2{,}5 \text{ años}$$

En dos años y medio habremos recuperado lo invertido. Si las generaciones de fondos no son iguales, el sistema consistirá en ir acumulando generaciones de fondos hasta llegar a completar el desembolso inicial y calcular en qué momento sucede esto.

Este criterio tiene importantes problemas que ponen seriamente en duda su validez:

- Olvida el concepto del valor del dinero en el tiempo.
- Olvida lo que sucede después de recuperarse la inversión. En efecto, dos proyectos resultarían indiferentes si tuvieran idéntico Pay back, aunque en años posteriores uno podría ser más ventajoso que otro.

CRITERIO DE "VALOR ACTUALIZADO NETO" (VAN)

El valor actualizado neto es el resultado de actualizar las generaciones de fondos con su signo correspondiente y sumarlas

$$\boxed{VAN = GFO_0 + \frac{GF_1}{(1+K)} + \frac{GF_2}{(1+K)^2} + \text{--------} + \frac{GF_n}{(1+K)^n}}$$:

Para poder calcular el VAN es preciso conocer cuál es la tasa de actualización "K". Esta K representa el coste de los fondos para la empresa (que es la forma de medir el valor del dinero en el tiempo). En función por ejemplo de los tipos de interés vigentes y del riesgo cuando éste se considera. En condiciones de certeza, que son las supuestas en este capítulo, se usa la tasa libre de riesgo, que puede calcularse en base al interés de los activos financieros del estado. Por otro lado siempre habrá de considerarse el coste de oportunidad.

El VAN tiene como fundamento el actualizar al momento presente magnitudes de años futuros para así hacerlas comparables, de esta manera las inversiones con VAN positivo serían interesantes y aquellas que lo tuvieran negativo serían rechazables. Además servirían para clasificar dentro de las interesantes en función del mayor o menor valor actualizado neto, lo que nos daría su grado de interés.

Pensemos que, si mi objetivo es maximizar la riqueza de mis accionistas, el VAN es el criterio fundamental. En efecto, al descontar al coste de los fondos, el valor actualizado neto es el valor actualizado excelente, lo que el proyecto añade al valor de la empresa.

En cualquier caso, si las generaciones de fondos se reinvierten a un tipo K' = K, al actualizar el valor final al tipo K y restarle D, llegamos al mismo valor actualizado neto. Estamos suponiendo que las generaciones de fondos se pueden reinvertir al tipo K, lo cual solo es posible cumplir si tenemos en cuenta mercados perfectos, donde se intentará conseguir esa rentabilidad mínima o se devolverá los fondos a los accionistas. Se supone pues, en consecuencia, que se puede obtener los fondos al tipo K o devolverlos cuando no consiga ese tipo.

CRITERIO DEL "ÍNDICE DE RENTABILIDAD" (IR)

Lo podemos definir como el cociente entre las generaciones de fondos a partir del año uno, actualizadas, y el desembolso inicial:

$$IR = \frac{\sum_{t=1} F_t (1+K)^{-t}}{D}$$

Es, en definitiva, el poner en forma de ratio lo que el VAN ponía en forma de diferencia. Obsérvese que el numerador de la fórmula anterior es el valor actual de todas las generaciones de flujos de efectivo (excluido el desembolso), luego el IR nos da el valor actual obtenido por euro de desembolso inicial; cuando es mayor que uno el proyecto es interesante, cuando es menor no lo es; en esto el criterio del IR coincide con el del VAN. El problema puede aparecer a la hora de clasificar proyectos, veamos algunos ejemplos:

					Clasificación	
Proyecto	VA	D	VAN	IR	VAN	IR
A	1.000	200	800	5,00	3.º	3.º
B	2.000	200	1.800	10,00	2.º	2.º
C	4.000	1.000	3.000	4,00	1.º	4.º
D	200	10	190	20,00	7.º	1.º
E	600	200	400	3,00	5.º	5.º
F	600	300	300	2,00	6.º	7.º
G	1.000	400	600	2,50	4.º	6.º
H	200	500	(300)	0,40	8.º	8.º

A la vista del cuadro anterior, podemos observar que si se trata de aceptar o rechazar inversiones, ambos criterios coinciden. Sin embargo, a la hora de ordenar los proyectos, de jerarquizarlos, vemos que aparecen discrepancias, hecho que sucede cuando los desembolsos son muy diferentes. Cuando nos encontremos ante proyectos excluyentes, tendremos que optar por uno u otro puede aparecernos la duda de cuál de los dos criterios resulta más adecuado, a cuál hemos de hacer caso cuando aparecen las discrepancias. El VAN es un mejor criterio para comprobarlo consideremos los proyectos:

	VAN	IR
C ➔	3.000	4,00
D ➔	190	20,00

Como el VAN es positivo en ambos, deberíamos hacer los dos, pero si tenemos que elegir uno, deberíamos decantarnos por el C, ya que añade 2.810 M más a la empresa que el A.

Existe una excepción: que existan limitaciones de fondos, consideremos el caso de que el proyecto A pudiera ser repetitivo, sería más interesante hacer 100 veces el A antes que una vez el C.

CRITERIOS DE LA "TASA DE RENTABILIDAD INTERNA" (TIR), DE LA TASA ANUAL EQUIVALENTE (TAE), DE LA TASA DE RENTABILIDAD EFECTIVA (TRE) Y DE LA TASA DE RENTABILIDAD REAL PARA EL INVERSOR

LA TIR

Denominaremos tasa de rentabilidad interna, TIR; al tipo de descuento que da lugar a un valor actualizado neto igual a cero. Es decir, igualamos el VAN a cero y despejamos el tipo de descuento de los diferentes flujos de efectivo. La Tasa Interna de Rentabilidad o TIR, es pues el tipo de interés que iguala el valor actual de los flujos de caja positivos (cobros) con el de los flujos negativos (pagos)

Si una persona compra un bono de empresa, cuyo nominal es de 300,00 EUR, por 315,00 EUR. El vencimiento es a 3 años y por cada año vencido cobra un cupón de 10,00 EUR. Y el cobro del último cupón coincide con la amortización del nominal; La igualdad que permite calcular la TIR de esta inversión es:

$$315{,}00 = \frac{10{,}00}{(1+i)^1} + \frac{10{,}00}{(1+i)^2} + \frac{10{,}00}{(1+i)^3} + \frac{300{,}00}{(1+i)^3}$$

Para que la tasa de rentabilidad final que se obtiene a una inversión coincida con su TIR hay que suponer que los fondos retirados se reinvierten al tipo de la TRI. De todo esto podemos deducir que, así como en el razonamiento queda implícita la reinversión al tipo de coste de los fondos, en el TIR, para que esta rentabilidad se mantenga hay que reinvertir a la propia TIR. Por lo demás no hay diferencias conceptuales importantes entre un sistema y otro, si bien el VAN lo que nos daba era el incremento de valor y el TIR la rentabilidad del proyecto.

Los proyectos con VAN mayor que cero tendrá una tasa de rentabilidad interna superior al coste de los fondos y al revés. Al menos así sucede en los proyectos convencionales que son aquellos con desembolso al principio y generaciones de fondos positivas después. En consecuencia, en estos casos, no habrá discrepancias entre el VAN y el TIR a la hora de aceptar o rechazar proyectos, pero sí puede hacerlas a la hora de clasificarlos.

Si la tasa interna de rentabilidad (TIR) se calcula considerando aquellos gastos normalmente de naturaleza financiera- que el Banco de España establece, entonces se obtiene otro valor de la rentabilidad llamado Tasa Anual Equivalente (TAE). Veámoslo en un ejemplo.

Supongamos que debe amortizarse un préstamo de 18.000 EUR, mediante 60 cuotas mensuales y vencidas (5 años) al tipo de interés nominal del 8,65%. Si calculamos el importe de la cuota mensual, aplicando la fórmula correspondiente:

$$a = V_A \cdot \frac{\left(1+\frac{i}{k}\right)^{n\cdot k} \cdot \frac{i}{k}}{\left(1+\frac{i}{k}\right)^{n\cdot k} - 1} = 18000 \cdot \frac{\left(1+\frac{0{,}0865}{12}\right)^{60} \cdot \frac{0{,}0865}{12}}{\left(1+\frac{0{,}0865}{12}\right)^{60} - 1} = 370{,}60\ EUR$$

LA TAE

Si la concesión del préstamo comporta una comisión de apertura del 1 % sobre el nominal (180 EUR), que se abona en el momento de la concesión, el tipo de interés efectivo pagado por el cliente es, lógicamente, superior. Ese tipo de interés es la

TAE. Se calculará a partir de la siguiente ecuación de equivalencia de capitales (iguala los cobros y los pagos, en el momento actual):

$$18000 = 180 + 370{,}60 \cdot \frac{\left(1+\frac{i}{12}\right)^{60} - 1}{\left(1+\frac{i}{12}\right)^{60} \cdot \frac{i}{12}}$$

El resultado obtenido es i = 0,75661 (7,57%). Este valor corresponde al tanto por ciento nominal de frecuencia 12. Para convertirlo a tanto efectivo, aplicaremos la fórmula que nos dará ya la TAE:

$$TAE = \left(1+\frac{i}{k}\right)^{k} - 1 = 0{,}09467$$

LA TRE

Tanto en la TIR como en la TAE se aplica, a todos los cobros o pagos, el mismo tipo de interés. No se tiene en cuenta, por ejemplo, que un capital cobrado se pude reinvertir a otros tipos de interés. Este defecto se subsana utilizando la TRE. En este tipo de cálculo, más preciso que la TIR y la TAE, se siguen estos pasos:

1°. Calcular el valor final de la inversión, teniendo en cuenta el periodo de capitalización de cada uno de los cobros y el tipo de interés aplicado para cada capital.

V F = D1 * (1+i1) ^n1 + D2 * (1+ i2) ^n2 + ... + Dn * (1+ in) ^ nn

- D1, D2 ... Dn, representan cada uno de los ingresos.
- VF: es el principal, recuperado al final de la operación.
- 1, i2 ... in: es el tipo de interés al que se reinvierte cada uno de los capitales.
- n1, n2... nn: es el tiempo que media entre el cobro de cada capital y el final de la operación.

2º. Hallar el tipo de interés, a interés compuesto, teniendo en cuenta el valor final, el desembolso inicial y el tiempo total de la operación. Se adapta la fórmula del interés en la equivalencia de capitales:

$$i = \sqrt[n]{\frac{V_F}{V_I}} - 1$$

El tipo de interés (i) obtenido así es la Tasa de Rentabilidad Efectiva (TRE)

Ejemplo:

Un inversor adquirió, hace 18 meses, 1000 acciones de una sociedad al precio de 12,00 EUR/acción. A los seis meses de la compra percibió un dividendo de 0,80 EUR por acción. Hoy vende sus acciones a 12,35 EUR. La ecuación matemática que calcula la TIR será:

$$12\,000{,}00 = \frac{800{,}00}{(1+i)^{0,5}} + \frac{12\,350{,}00}{(1+i)^{1,5}}$$

Para calcular la TIR se igualan los cobros y pagos en el momento de la inversión. En este caso, 12.000,00 EUR es el valor de adquisición de las acciones, 800,00 EUR el valor del dividendo y 12.350,00 EUR el valor de venta. Estos últimos valores se actualizan a la fecha de adquisición.). Haciendo los cálculos pertinentes en la fórmula anterior se obtiene una TIR de 6,574 %. Esta tasa de rentabilidad está suponiendo que los 800,00 EUR percibidos en concepto de dividendo se han reinvertido al 6,574 %. Pero vamos a suponer que se reinvierten al 3,80 % anual. Por eso, la Tasa de Rentabilidad Efectiva (TRE) expresará con mayor precisión la rentabilidad que obtiene nuestro inversor.

$$\left[V_F = 800{,}00 \cdot (1 + 0{,}038)^1 + 12\,350{,}00 = 13\,180{,}40 \right]$$

$$\left[TRE = \sqrt[1,5]{\frac{13\,180{,}40}{12\,000{,}00}} - 1 = 0{,}06455 \right]$$

Como era de esperar, la TRE es inferior a la TIR, porque los dividendos se reinvierten, en este caso, a una tasa inferior a la TIR. Si suponemos que los dividendos no se reinvierten, obtendremos la rentabilidad mínima de la operación, que coincidirá con el valor de la rentabilidad simple anualizada. Si los 800,00 EUR de dividendo no se reinvierten, entonces:

$$\left[V_F = 800{,}00 + 12\,350{,}00 = 13\,150{,}00 \right]$$

$$\left[TRE = \sqrt[1{,}5]{\frac{13\,150{,}00}{12\,000{,}00}} - 1 = 0{,}06291 \right]$$

LA TASA DE RENTABILIDAD REAL PARA EL INVERSOR

Hay varios factores que pueden hacer variar la rentabilidad que obtiene un inversor de un determinado activo, tales como:

- Los gastos de gestión que cobra la entidad.
- La retención fiscal que se realiza al cobrar intereses o dividendos.
- El tipo de gravamen correspondiente al inversor en el IRPF.
- La inflación monetaria.

Para obtener la rentabilidad real es preciso conocer todos los factores mencionados.

Ejemplo:

Supongamos que un inversor coloca 1.000,00 EUR en bonos cupón cero que se amortizan al 132,50 %, dentro de cuatro años. En el momento de la amortización, la entidad financiera le cobra 40,00 EUR en concepto de gastos de gestión. Las preguntas son: ¿Qué capital recibirá en la fecha de amortización? ¿Cuál es la ecuación matemática que permite calcular la TIR?

Solución

El capital que recibirá en la fecha de amortización será de 285,00 EUR (Puesto que se amortiza al 132,50%, los 1 000,00 EUR de inversión pasan a ser 1 325,00 EUR, de los que deben deducirse los 40,00 EUR de gastos.)

La ecuación es:

$$1\,000{,}00 = \frac{1\,285{,}00}{(1+i)^4}$$

La TIR obtenida es del 6,47 % anual.

Supongamos, continuando con el ejemplo, que ahora que la entidad, de acuerdo con la normativa fiscal, retiene al inversor un 19 %, sobre los beneficios, a cuenta del IRPF; es decir, 61,75 EUR (el 19 % de 325,00 EUR). En ese caso, no percibirá 1.285,00 EUR sino 1.223,25 EUR En consecuencia, el cálculo de la TIR nos daría una rentabilidad inferior al 6,47 % anual que hemos calculado antes. La ecuación de equivalencia sería

$$1\,000{,}00 = \frac{1\,223{,}25}{(1+i)^4}$$

La TIR ahora pasa a ser del 5,17 % anual.

Pero, es más; cuando el inversor en el siguiente ejercicio, realice su declaración de renta, deberá indicar los beneficios que le produjo su inversión y tributar por la misma según su tipo marginal impositivo. Suponiendo que su tipo impositivo sea del 35 % y que deba imputar a ingresos del ejercicio todo el beneficio obtenido, el Importe que debe pagar a Hacienda será de 52,00 EUR. Ya que es el 35 % de los 325,00 EUR de beneficio, deducidos los 61,75 EUR que ya le retuvo la entidad en el momento de la liquidación.)

$$1\,000{,}00 = \frac{1\,223{,}25}{(1+i)^4} - \frac{52{,}00}{(1+i)^5}$$

La ecuación planteada sirve para calcular la TIR de la inversión (suponiendo, para simplificar los cálculos, que el pago a Hacienda se realiza exactamente un año después del vencimiento del cupón, o sea, cinco años después de la inversión inicial). Los 52,00 EUR retenidos se indican en la fórmula con signo negativo, por ser un pago. Además, el factor de actualización tiene un exponente de 5, ya que el pago a Hacienda se hace el quinto año posterior al momento de la inversión.)

El tipo de interés obtenido en el cálculo anterior indicará la TIR después de impuestos, por tener en cuenta el beneficio obtenido por el inversor, pero también el efecto de fiscalidad del producto.

Existen productos financieros singulares (como las aportaciones a planes de pensiones, las imposiciones en una cuenta vivienda, etcétera) que permiten desgravar en el IRPF, con lo que la rentabilidad obtenida por el inversor es superior a la de productos semejantes sin esa ventaja. En estos casos se utiliza el concepto de rentabilidad financiero fiscal, para comparar la rentabilidad de un producto que tiene ventajas fiscales con otro que no las tiene

Ejemplo.

Una persona, con un tipo marginal en su IRPF del 24 %, ha invertido en una IPF a 12 meses que le ha reportado unos intereses de 4.000,00 EUR. Al hacer su declaración de renta, ha tenido que pagar 960,00 EUR por esos beneficios. Si el tipo de interés bruto anual de la IPF es del 5,30 %, la rentabilidad real para ese inversor será Inferior a 5,30 %, ya que debe contemplarse el gasto que supone el pago a Hacienda. La rentabilidad real dependerá siempre del tipo marginal de cada inversor.

Supongamos ahora que el mismo inversor colocara el capital en un producto que tuviera supuestamente una bonificación fiscal del 40 % (es decir, sólo debe declararse a Hacienda el 60 % de los intereses percibidos). Si el tipo de interés bruto anual de ese producto es también del 5,30 %, la rentabilidad real obtenida por el inversor con respecto a la IPF de 12 meses, que no tenía ventajas fiscales, será mayor, ya que hay una deducción fiscal del 40 % más pequeña. La rentabilidad financiero fiscal de un producto con ventajas fiscales, para un determinado inversor, equivale al interés bruto anual que debería ofrecer otro producto semejante, sin ninguna ventaja fiscal, para que, después de impuestos, proporcionara el mismo rendimiento real anual del producto con ventajas fiscales. Puede verse en el siguiente ejemplo numérico:

	Producto A **con ventajas fiscales**	**Producto B** **sin ventajas fiscales**
Tipo de interés bruto anual	5,30 %	6,12 %
Tipo de interés después de impuestos	4,00 %	4,00 %
Rentabilidad financiero fiscal	6,12 %	

Es decir, aunque el producto A tiene un tipo de interés bruto anual menor que el del producto B, su rentabilidad financiero fiscal es mayor (6,12 %), porque el tipo de interés bruto anual que debe ofrecer el producto B, sin ventajas fiscales, para obtener el mismo tipo de interés real que el producto A (4,00 %), es del 6,12 %.

Además de los impuestos, otra variable externa que afecta a la rentabilidad es la inflación. La inflación disminuye el poder adquisitivo del dinero que se ha ahorrado, o sea, devalúa el ahorro. La inflación es, por tanto, uno de los principales enemigos del ahorro y, consecuentemente, de la inversión.

Así pues, para calcular la rentabilidad real de un activo deben tenerse en cuenta:

- Los gastos y comisiones que cobra la entidad financiera.
- La carga fiscal que debe soportar el propietario.
- La tasa de inflación.